**Zum Widerspruch im Überabzählbaren:**

Die mir mit Abstand wichtigste Untersuchung habe ich 1972 in meiner Arbeit "Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit" in der Zeitschrift "Philosophia naturalis" erstmals angesprochen. Sie betrifft das erste Hilbert-Problem und damit auch die Kontinuums-Hypothese. Diese Arbeit und zahlreiche auf sie folgende einschlägige Arbeiten lösen das Problem (vgl. meine Website "www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/")

Grundlage der Überlegungen ist die Tatsache, dass alles worüber gesprochen werden kann auch in endlicher Form dargestellt werden kann. Eigentlich ein Pleonasmus. Stößt aber interessanter Weise auf große Verständnisschwierigkeiten.

Übrigens eine Facette der Verständnisschwierigkeiten: Bei einem Vortrag an der TU hatte ich die Forderung formuliert, nur solche reelle Zahlen als widerspruchsfrei existierend anzusehen, die in endlicher Form "beschrieben" werden können. Daraufhin ging einer der Assistenten zur Tafel, schrieb ein paar Zeilen und sagte: "Aber diese Zahlen haben Sie damit nicht erfasst". Dass er eben etwas "in endlicher Form beschrieben" hatte, dürfte ihm entgangen sein.

Ein wesentlicher Grund für Verständnisschwierigkeiten, die meine Überlegungen zum ersten Hilbert-Problem mit sich bringen, liegt sicher in der als Axiom von vielen Mathematikern angenommenen aber meines Wissens nie als Axiom formulierten Ansicht, Mathematik sei wie Physik eine Naturwissenschaft, deren Aufgabe darin bestehe, die in der Natur vorgegebenen mathematischen Sätze aufzufinden. Nun bis hierhin könnte dieser Ansicht durchaus beigepflichtet werden. Sie wird aber dann problematisch, wenn man glaubt, Mathematik ohne Mathematiker betreiben zu können. Und genau darin liegt der Unterschied zu meinen Überlegungen, die einen Mathematiker als "in Raum und Zeit Mathematik betreibende Person" voraussetzen.

Ernst Jünger hat diesen Gedanken in einem klugen Aphorismus ausgedrückt: "Die Zahl wurde nicht entdeckt, sie wurde erfunden, und es gibt nichts ihr Ebenbürtiges im Reich der Erfindungen". Percy Bysshe Shelley sagt etwas universeller, weil nicht auf Zahlen beschränkt, in seinem 'Prometheus Unbound': "And speech created thought wich is the measure of the universe". Über die Gedankenkette "etwas messen → etwas begreifen → etwas bedenken → an etwas denken" kann man zur Metapher "Alles Denkbare Universum" kommen.

Den Gedanken, die einzelnen logischen Schritte der eigenen Überlegungen mit Hilfe der Überlegungen einer anderen Person zu kontrollieren, also die eigenen "Wahrheiten" mit den "Wahrheiten" anderer Personen zu vergleichen, fand ich am schönsten in der Mäeutik, der "Hebammenkunst", von Sokrates angewendet.

Meine Überlegungen beruhen auf dem, wenn man so will, Axiom: "Mathematik kann nur dann widerspruchsfrei (!) betrieben werden, wenn ihre 'Sätze' in irgendeiner 'Sprache' und 'schriftlich' niedergelegt werden können". Demnach kann man nur dann sinnvoll und widerspruchsfrei von "Objekten der Mathematik" sprechen, wenn es irgendwann irgendwo eine Person geben **kann**, die ein solches Objekt in Form einer endlichen - wenn auch beliebig umfangreichen - Mitteilung widerspruchsfrei beschreiben kann. Zum Beweis dessen bin ich davon ausgegangen, dass jede mögliche derartige Beschreibung ein gewisses Mindestvolumen im Raum-Zeit Universum beansprucht und diese Mindestvolumina abzählbar angeordnet werden können.

Die Hauptursache der Verständnisschwierigkeiten, auf die meine Überlegungen gestoßen sind, liegt meines Erachtens darin, dass wir nur dann Informationen - etwa über wahre Aussagen, über mathematische Sätze, über Beweise, über Widersprüche oder was auch immer - weitergeben können, wenn wir uns einer Sprache bedienen, von der wir annehmen dürfen, der Gesprächspartner verstehe sie **im selben Sinne** wie wir selbst. Es muss sich also um eine grundsätzlich von allen erlernbare Sprache handeln da wir wohl ohne Sprachkenntnisse zur Welt gekommen sind. Mit der Annahme, jeder Gesprächspartner müsse unsere Sprache im selben Sinn verstehen entziehen wir aber unserer Sprache ihre **Individualität**, also ihre Eigenschaft, zunächst nur für das sie verwendende Individuum "verständlich" zu sein. Wir stellen uns damit auf den Standpunkt, die Sprache, jede Sprache, existiere vom Menschen unabhängig.

Diese Nachlässigkeit im Umgang mit Begriffen, mit sprachlichen Ausdrücken, hat zur Folge, dass wir bedenkenlos Begriffe verwenden, die höchst unscharf sind, also in unterschiedlichster Weise interpretiert werden können. Denken wir etwa als ein extremes Beispiel an die Begriffe "Gott", "sein" (Zeitwort) und "Liebe" und die daraus gebildete Feststellung "Gott ist die Liebe".

Der gleiche Mangel haftet unseren Bestrebungen an, die Welt "anschaulich" zu beschreiben, also so wie unsere Sinnesorgane uns Eindrücke von ihr vermitteln. Während wir aber etwa in der Physik der Elementarteilchen (notgedrungen) vielfach auf Anschaulichkeit verzichten sind wir hinsichtlich der Sprache und ihres Gebrauches kaum dazu bereit und so kommt es, dass wir über in sich widersprüchliche Begriffe wie "überabzählbare Mengen" hinwegsehen.

Der Einwand eines Kritikers lautete etwa, mein Schluss über die Abzählbarkeit alles dessen, worüber gesprochen werden kann, sei ein Zirkelschluss, da von vornherein nur eine abzählbare Menge betrachtet wird. Dieser Kritiker hat schlicht und einfach den Beweisgang nicht verstanden. Der Beweis gliedert sich nämlich in zwei Teile. Zuerst wird eine abzählbare Menge definiert, von der ich behaupte, sie sei vollständig. In einem zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass jeder Versuch, die Unvollständigkeit dieser abzählbaren Menge zu beweisen, zu einem Widerspruch führen muss. (Unter den von mir expliziert angeführten Beispielen findet sich insbesondere auch die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zusammen mit dem Prinzip der Cantor'schen Diagonalzahl.) Der Einwand übersieht also meinen Nachweis des Widerspruchs in **jedem** Versuch die Unvollständigkeit meiner abzählbar angeordneten Menge zu beweisen. Der Kritiker unterscheidet übrigens "successive infinit = potentiell unendlich" und "at once infinit = aktual unendlich". Der von ihm geprägte Ausdruck "at once infinit" zeigt deutlich, dass er keine andere Möglichkeit sieht, über das potentiell Unendliche hinausgehende Bereiche zu erfassen, als diese Bereiche als Ganzes, auf einmal, eben at once, einzubeziehen ohne auf irgend ein einzelnes Element der Menge eingehen zu müssen. **Er befindet sich dabei in der selben Lage wie jemand, der zunächst von einem Bereich spricht, der alles enthält, worüber man sprechen kann, anschließend aber über einen Bereich spricht, der alles enthält, worüber man nicht sprechen kann, ohne sich des inneren Widerspruchs dieser seiner Überlegungen bewusst zu sein.**

Lässt man ganz allgemein auch Begriffe zu, die zwar in sich widersprüchlich sind, über die man aber sprechen kann, wie etwa der Begriff "Die kleinste einstellige Zahl größer als fünf und kleiner als drei", dann erweitert man den zunächst widerspruchsfreien betrachteten Bereich. Man kann dann etwa definieren: **"Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann".** Deckungsgleich mit aber in meinem Verständnis etwas präziser als Wittgensteins "Die Welt ist alles, was der Fall ist".

Tatsächlich hat der von mir hergeleitete Widerspruch seine Ursache in einem zugrundegelegten Axiom, das z.B. so formuliert werden kann: "Jeder Beweis muss sich auch schriftlich darstellen lassen". Dies wurde meines Wissens nie explizit als Axiom formuliert, wird aber de facto stets gefordert.